Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 417101 12 gennaio 2026

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	c
2	a
3	b
4	a
5	b
6	d
7	c
8	d
9	d
10	c

1. La derivata della funzione $f(x) = (\tan x)^{(x^2)}$ è

(a) $2x(\tan x)^{(x^2)}$

(b) $\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^{2x}$

► (c) $x(\tan x)^{(x^2)}\left(2\log(\tan x) + \dfrac{x}{\sin x \cos x}\right)$

(d) $x^2(\tan x)^{x^2-1}$

Soluzione:

$$f(x) = (\operatorname{tg} x)^{(x^2)} = e^{x^2 \log(\operatorname{tg} x)}$$

$$f'(x) = e^{x^2 \log(\operatorname{tg} x)} \left(2x \log(\operatorname{tg} x) + x^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) =$$

$$= (\operatorname{tg} x)^{(x^2)} \left(2x \log(\operatorname{tg} x) + x^2 \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^{\cancel{2}} x} \right) =$$

$$= x (\operatorname{tg} x)^{(x^2)} \left(2 \log(\operatorname{tg} x) + \frac{x}{\sin x \cos x} \right)$$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x(\sin x - x)} =$

► (a) $-\infty$ (b) $+\infty$ (c) 0 (d) $\dfrac{1}{6}$

Soluzione:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(\sin x - x)}$$

Ricordiamo gli sviluppi di Taylor

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, per $x \to 0$.

Quindi

$$\frac{e^x - 1 - x}{x(\sin x - x)} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1} - \cancel{x}}{x\left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - \cancel{x})} = \frac{x^2\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)}{x^4\left(-\frac{1}{6} + o(x)\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{x^2\left(-\frac{1}{6} + o(x)\right)} \longrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{0^-} = -\infty.$$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{4}} x \tan(4x^2)\, dx.$

(a) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$ ► (b) $\dfrac{\log 2}{16}$ (c) $-\dfrac{1}{8} \log \cos \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$ (d) $1 + \pi$

Soluzione:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/4} x \, tg(4x^2)\, dx$$

Eseguiamo la sostituzione $4x^2 = t$, $\frac{dt}{dx} = 8x$, $x\,dx = \frac{dt}{8}$

ottenendo

$$\int x \, tg(4x^2)\, dx = \int tg\, t \, \frac{dt}{8} = \frac{1}{8}\int \frac{\sin t}{\cos t}\, dt = -\frac{1}{8}\int \frac{-\sin t}{\cos t}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{8}\log(\cos t) + c = -\frac{1}{8}\log(\cos(4x^2)) + c$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/4} x \, tg(4x^2)\, dx = \left[-\frac{1}{8}\log(\cos(4x^2))\right]_0^{\sqrt{\pi}/4} =$$

$$= -\frac{1}{8}\log\left(\cos\left(4\frac{\pi}{16}\right)\right) + \frac{1}{8}\log(\cos 0) = -\frac{1}{8}\log\frac{\sqrt{2}}{2} + \cancel{\frac{1}{8}\log 1}$$

$$= -\frac{1}{8}\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\log 2\right) = \frac{1}{16}\log 2$$

4. $\displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-|x|}\,dx =$

► (a) $2 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$ (b) $\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}$ (c) 0 (d) $e - e^2$

Soluzione:

Ricordiamo che

$$e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

quindi

$$\int_{-1}^{2} e^{-|x|}\,dx = \int_{-1}^{0} e^{x}\,dx + \int_{0}^{2} e^{-x}\,dx = \left[e^{x}\right]_{-1}^{0} + \left[-e^{-x}\right]_{0}^{2} =$$

$$= e^{0} - e^{-1} - e^{-2} + e^{0} = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} + 1 = 2 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}.$$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\cos x - e^x}{x - \sin x}\,dx$

(a) non esiste ► (b) diverge negativamente (c) diverge positivamente (d) converge

Soluzione:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos x - e^x}{x - \sin x}\, dx$$

Poniamo $f(x) = \frac{\cos x - e^x}{x - \sin x}$ e osserviamo che f non è definita per $x = 0$. In ogni altro punto dell'intervallo di integrazione f è definita e continua poiché $|\sin x| < |x|$ $\forall\, x \neq 0$.

Utilizzando gli sviluppi di Taylor per $x \to 0$ otteniamo che

$$f(x) = \frac{\cancel{1} + o(x) - (\cancel{1} + x + o(x))}{\cancel{x} - (\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4))} = \frac{-x + o(x)}{\frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \frac{x\,(-1 + o(1))}{x^3\left(\frac{1}{6} + o(x)\right)} =$$

$$= \frac{1}{x^2} \frac{-1 + o(1)}{\frac{1}{6} + o(x)}$$

Scegliendo $g(x) = \frac{1}{x^2}$ otteniamo che

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -6 < 0$, quindi, per il criterio del confronto asintotico, dato che $\int_0^1 g(x)\, dx = +\infty$, avremo che

$$\int_0^1 f(x)\, dx = -\infty.$$

Ripetendo il ragionamento sull'intervallo $[-1, 0)$ avremo che

$\int_{-1}^{0} f(x)\, dx = -\infty$. Ne segue che

$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ diverge negativamente.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$

(a) diverge positivamente

(b) converge ma non converge assolutamente

(c) non esiste

► (d) converge assolutamente

Soluzione:

Sia $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$. La funzione f non è definita per $x=0$, dividiamo quindi l'intervallo nel punto $x=1$.

Per $x \in (0,1]$ $f(x) \geq 0$ e per $x \to 0$ $\sin x = x + o(x^2)$

quindi $f(x) = \frac{x+o(x^2)}{x^{3/2}} = \frac{x\,(1+o(x))}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}\,(1+o(x))$.

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ e applichiamo il confronto asintotico.

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge, quindi $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge e converge anche assolutamente perché $|f(x)| = f(x)$.

Per $x \in [1,+\infty)$ consideriamo $|f(x)|$.

$$|f(x)| = \frac{|\sin x|}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge, per il criterio del confronto $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge assolutamente.

7. La successione $a_n = n \sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+1)\right) + (-1)^n \log n$

(a) è debolmente decrescente

(b) è limitata ma non ha limite

► (c) è limitata inferiormente

(d) non è limitata né inferiormente né superiormente

Soluzione:

$$a_n = n\sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+1)\right) + (-1)^n \log n = n\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + (-1)^n \log n =$$

$$= n\sin\frac{\pi}{2} + (-1)^n \log n = n + (-1)^n \log n$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 + \frac{(-1)^n \log n}{n}\right) \longrightarrow +\infty\,(1+0) = +\infty.$$

quindi la successione è limitata inferiormente.

8. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\log(e^n+1) - \frac{n^2+1}{n}\right)$

(a) diverge positivamente

(b) converge assolutamente

(c) converge ma non converge assolutamente

► (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1}\left(\log(e^n+1) - \frac{n^2+1}{n}\right)$$

Poniamo $a_n = \log(e^n+1) - \frac{n^2+1}{n} = \log\left(e^n\left(1+\frac{1}{e^n}\right)\right) - n - \frac{1}{n} =$

$$= \log(e^n) + \log\left(1+\frac{1}{e^n}\right) - n - \frac{1}{n} = \cancel{n} + \frac{1}{e^n} + o\left(\frac{1}{e^n}\right) - \cancel{n} - \frac{1}{n} =$$

$$= -\frac{1}{n} + \frac{1}{e^n} + o\left(\frac{1}{e^n}\right)$$

dove abbiamo usato lo sviluppo di Taylor

$\log(1+t) = t + o(t)$, $t \to 0$ con $t = \frac{1}{e^n}$, $n \to +\infty$.

Scegliamo ora $b_n = \frac{1}{n}$ e osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{e^n} + o\left(\frac{1}{e^n}\right)\right) = -1$$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

9. Sia $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}$, allora $f_{xx} + f_{yy} =$

(a) $2(x+y)e^{x^2+y^2}+2(x-y)e^{x^2-y^2}$

(b) $2e^{x^2+y^2}(2+x+y)+2e^{x^2-y^2}(x-y)$

(c) $2e^{x^2}(e^{y^2}+e^{-y^2})$

► (d) $4e^{x^2+y^2}+4(x^2+y^2)(e^{x^2+y^2}+e^{x^2-y^2})$

Soluzione:

$$f(x,y)=e^{x^2+y^2}+e^{x^2-y^2}$$

$$f_x=2xe^{x^2+y^2}+2xe^{x^2-y^2}=2x\left(e^{x^2+y^2}+e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_y=2ye^{x^2+y^2}-2ye^{x^2-y^2}=2y\left(e^{x^2+y^2}-e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_{xx}=2\left(e^{x^2+y^2}+e^{x^2-y^2}+2x^2e^{x^2+y^2}+2x^2e^{x^2-y^2}\right)=$$

$$=2\left(e^{x^2+y^2}+e^{x^2-y^2}\right)+4x^2\left(e^{x^2+y^2}+e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_{yy}=2\left(e^{x^2+y^2}-e^{x^2-y^2}+2y^2e^{x^2+y^2}+2y^2e^{x^2-y^2}\right)=$$

$$=2\left(e^{x^2+y^2}-e^{x^2-y^2}\right)+4y^2\left(e^{x^2+y^2}+e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_{xx}+f_{yy}=4e^{x^2+y^2}+4(x^2+y^2)\left(e^{x^2+y^2}+e^{x^2-y^2}\right)$$

10. La norma del vettore $\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$ vale

(a) $\sqrt{30}$

(b) 10

► (c) $\sqrt{38}$

(d) $\sqrt{10}$

Soluzione:

$$\left\|\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{3^2+2^2+5^2}=\sqrt{9+4+25}=\sqrt{38}$$

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 837804 12 gennaio 2026

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	b
3	c
4	d
5	b
6	c
7	a
8	d
9	d
10	b

1. La derivata della funzione $f(x) = (\tan x)^{(x^2)}$ è

(a) $\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^{2x}$

► (b) $x(\tan x)^{(x^2)}\left(2\log(\tan x) + \dfrac{x}{\sin x \cos x}\right)$

(c) $2x(\tan x)^{(x^2)}$

(d) $x^2(\tan x)^{x^2-1}$

Soluzione:

$$f(x) = (\operatorname{tg} x)^{(x^2)} = e^{x^2 \log(\operatorname{tg} x)}$$

$$f'(x) = e^{x^2 \log(\operatorname{tg} x)} \left(2x \log(\operatorname{tg} x) + x^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) =$$

$$= (\operatorname{tg} x)^{(x^2)} \left(2x \log(\operatorname{tg} x) + x^2 \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^{\cancel{2}} x} \right) =$$

$$= x (\operatorname{tg} x)^{(x^2)} \left(2 \log(\operatorname{tg} x) + \frac{x}{\sin x \cos x} \right)$$

2. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

(a) è limitata superiormente ma non ha massimo

► (b) ha minimo

(c) è limitata inferiormente ma non ha minimo

(d) non è limitata superiormente

Soluzione:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad f(0) = 0$ quindi

$\min(f) = 0$.

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{4}} x \tan(4x^2)\, dx.$

(a) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$

(b) $-\dfrac{1}{8} \log \cos \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$

► (c) $\dfrac{\log 2}{16}$

(d) $1 + \pi$

Soluzione:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/4} x\, tg(4x^2)\, dx$$

Eseguiamo la sostituzione $4x^2 = t$, $\frac{dt}{dx} = 8x$, $x\,dx = \frac{dt}{8}$

ottenendo

$$\int x\, tg(4x^2)\, dx = \int tg\, t\, \frac{dt}{8} = \frac{1}{8}\int \frac{\sin t}{\cos t}\, dt = -\frac{1}{8}\int \frac{-\sin t}{\cos t}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{8}\log(\cos t) + c = -\frac{1}{8}\log(\cos(4x^2)) + c$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/4} x\, tg(4x^2)\, dx = \left[-\frac{1}{8}\log(\cos(4x^2))\right]_0^{\sqrt{\pi}/4} =$$

$$= -\frac{1}{8}\log\left(\cos\left(4\frac{\pi}{16}\right)\right) + \frac{1}{8}\log(\cos 0) = -\frac{1}{8}\log\frac{\sqrt{2}}{2} + \cancel{\frac{1}{8}\log 1}$$

$$= -\frac{1}{8}\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\log 2\right) = \frac{1}{16}\log 2$$

4. La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_{e^x}^{e^{2x}} \log^2 t \, dt$

(a) ha sia massimo che minimo

(b) ha massimo ma non ha minimo

(c) non ha né massimo né minimo

► (d) ha minimo ma non ha massimo

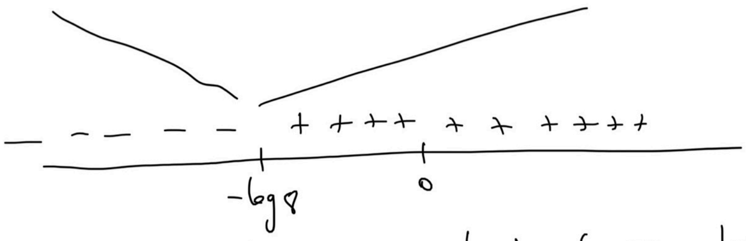
Soluzione:

$$F(x) = \int_{e^x}^{e^{2x}} \log^2 t \, dt$$

$$F'(x) = \log^2(e^{2x}) \cdot 2e^{2x} - \log^2 e^x \cdot e^x = (2x)^2 \cdot 2e^{2x} - x^2 \cdot e^x =$$

$$= 8x^2 e^{2x} - x^2 e^x = x^2 e^x (8e^x - 1)$$

$$F'(x) > 0 \iff 8e^x - 1 > 0 \iff e^x > \frac{1}{8} \iff x > \log\left(\frac{1}{8}\right) = -\log 8$$



$F'(-\log 8) = 0$

$F'(0) = 0$

F è strettamente decrescente in $(-\infty, -\log 8]$ e strettamente crescente in $[-\log 8, 0]$ e in $[0, +\infty)$, quindi strettamente cresente in $[-\log 8, \infty)$. Ne segue che $x = -\log 8$ è punto di minimo per F. F non ha massimo.

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\cos x - e^x}{x - \sin x} \, dx$

(a) diverge positivamente

► (b) diverge negativamente

(c) non esiste

(d) converge

Soluzione:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos x - e^x}{x - \sin x}\, dx$$

Poniamo $f(x) = \dfrac{\cos x - e^x}{x - \sin x}$ e osserviamo che f non è definita per $x = 0$. In ogni altro punto dell'intervallo di integrazione f è definita e continua poiché $|\sin x| < |x|$ $\forall x \neq 0$.

Utilizzando gli sviluppi di Taylor per $x \to 0$ otteniamo che

$$f(x) = \frac{\cancel{1} + o(x) - (\cancel{1} + x + o(x))}{\cancel{x} - (\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4))} = \frac{-x + o(x)}{\frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \frac{x\,(-1 + o(1))}{x^3\left(\frac{1}{6} + o(x)\right)} =$$

$$= \frac{1}{x^2} \quad \frac{-1 + o(1)}{\frac{1}{6} + o(x)}$$

Scegliendo $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ otteniamo che

$\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -6 < 0$, quindi, per il criterio del confronto asintotico, dato che $\int_0^1 g(x)\, dx = +\infty$, avremo che

$$\int_0^1 f(x)\, dx = -\infty.$$

Ripetendo il ragionamento sull'intervallo $[-1, 0)$ avremo che

$\int_{-1}^{0} f(x)\, dx = -\infty$. Ne segue che

$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ diverge negativamente.

6. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\log(\sqrt{x}+1) - \log(\sqrt{x}-1)}{x^{\frac{3}{4}}}\, dx$

(a) non esiste (b) diverge negativamente ▶ (c) converge (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\log(\sqrt{x}+1) - \log(\sqrt{x}-1)}{x^{3/4}}\, dx$$

Poniamo $f(x) = \dfrac{\log(\sqrt{x}+1) - \log(\sqrt{x}-1)}{x^{3/4}}$ e osserviamo che

f è definita $\forall x \in [2, +\infty)$, dovremo quindi esaminare solo l'andamento di f per $x \to +\infty$.

$$\log(\sqrt{x}+1) - \log(\sqrt{x}-1) = \log\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1}\right) =$$

$$= \log\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}-1} + o\left(\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}-1} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Quindi $f(x) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-1} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) x^{-3/4} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + o(1)\right) x^{-3/4} =$

$$= \frac{2}{x^{5/4}}\left(1 + o(1)\right).$$

Poniamo $g(x) = \dfrac{1}{x^{5/4}}$, osserviamo che $f(x) > 0 \ \forall x \in [2, +\infty)$

e che $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$. Dato che $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, dal criterio del confronto asintotico, anche $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

7. La successione $a_n = n \sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+1)\right) + (-1)^n \log n$

▶ (a) è limitata inferiormente

(b) è debolmente decrescente

(c) non è limitata né inferiormente né superiormente

(d) è limitata ma non ha limite

Soluzione:

$$a_n = n\sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+1)\right) + (-1)^n \log n = n\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + (-1)^n \log n =$$

$$= n\sin\frac{\pi}{2} + (-1)^n \log n = n + (-1)^n \log n$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 + \frac{(-1)^n \log n}{n}\right) \to +\infty\,(1+0) = +\infty.$$

quindi la successione è limitata inferiormente.

8. La serie $\sum_{n\geq 1}\left(\log(e^n+1) - \frac{n^2+1}{n}\right)$

(a) diverge positivamente

(b) converge ma non converge assolutamente

(c) converge assolutamente

► (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1}\left(\log(e^n+1) - \frac{n^2+1}{n}\right)$$

Poniamo $a_n = \log(e^n+1) - \frac{n^2+1}{n} = \log\left(e^n\left(1+\frac{1}{e^n}\right)\right) - n - \frac{1}{n} =$

$$= \log(e^n) + \log\left(1+\frac{1}{e^n}\right) - n - \frac{1}{n} = \cancel{n} + \frac{1}{e^n} + o\left(\frac{1}{e^n}\right) - \cancel{n} - \frac{1}{n} =$$

$$= -\frac{1}{n} + \frac{1}{e^n} + o\left(\frac{1}{e^n}\right)$$

dove abbiamo usato lo sviluppo di Taylor

$\log(1+t) = t + o(t)$, $t\to 0$ con $t = \frac{1}{e^n}$, $n\to+\infty$.

Scegliamo ora $b_n = \frac{1}{n}$ e osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{e^n} + o\left(\frac{1}{e^n}\right)\right) = -1$$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

9. Sia $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}$, allora $f_{xx} + f_{yy} =$

(a) $2e^{x^2}(e^{y^2}+e^{-y^2})$

(b) $2(x+y)e^{x^2+y^2}+2(x-y)e^{x^2-y^2}$

(c) $2e^{x^2+y^2}(2+x+y)+2e^{x^2-y^2}(x-y)$

► (d) $4e^{x^2+y^2}+4(x^2+y^2)(e^{x^2+y^2}+e^{x^2-y^2})$

Soluzione:

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}$$

$$f_x = 2xe^{x^2+y^2} + 2xe^{x^2-y^2} = 2x\left(e^{x^2+y^2}+e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_y = 2ye^{x^2+y^2} - 2ye^{x^2-y^2} = 2y\left(e^{x^2+y^2}-e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_{xx} = 2\left(e^{x^2+y^2}+e^{x^2-y^2}+2x^2e^{x^2+y^2}+2x^2e^{x^2-y^2}\right) =$$

$$= 2\left(e^{x^2+y^2}+e^{x^2-y^2}\right)+4x^2\left(e^{x^2+y^2}+e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_{yy} = 2\left(e^{x^2+y^2}-e^{x^2-y^2}+2y^2e^{x^2+y^2}+2y^2e^{x^2-y^2}\right) =$$

$$= 2\left(e^{x^2+y^2}-e^{x^2-y^2}\right)+4y^2\left(e^{x^2+y^2}+e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_{xx}+f_{yy} = 4e^{x^2+y^2}+4(x^2+y^2)\left(e^{x^2+y^2}+e^{x^2-y^2}\right)$$

10. La funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ nel punto $(0,0)$

(a) ha la derivata parziale rispetto a y ma non quella rispetto a x

► (b) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua

(c) ha entrambe le derivate parziali ed è continua

(d) non ha nessuna derivata parziale

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\cancel{\frac{\sqrt[3]{h\cdot 0}}{\sqrt{h^2+0}}} - 0\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\cancel{\frac{\sqrt[3]{0\cdot h^2}}{\sqrt{0+h^2}}} - 0\right) = 0$$

quindi esistono entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

Consideriamo ora la restrizione di f alla curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$.

$$f(\gamma(t)) = \frac{\sqrt[3]{t^3}}{\sqrt{t^2+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{2}\cdot|t|} \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0^+} f(\gamma(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq f(0,0)$$

quindi f non è continua in $(0,0)$.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 591985 12 gennaio 2026

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	d
3	a
4	a
5	a
6	a
7	c
8	b
9	d
10	b

1. La derivata della funzione $f(x) = (\tan x)^{(x^2)}$ è

(a) $x^2(\tan x)^{x^2-1}$

► (b) $x(\tan x)^{(x^2)}\left(2\log(\tan x) + \dfrac{x}{\sin x \cos x}\right)$

(c) $\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^{2x}$

(d) $2x(\tan x)^{(x^2)}$

Soluzione:

$$f(x) = (\operatorname{tg} x)^{(x^2)} = e^{x^2 \log(\operatorname{tg} x)}$$

$$f'(x) = e^{x^2 \log(\operatorname{tg} x)} \left(2x \log(\operatorname{tg} x) + x^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) =$$

$$= (\operatorname{tg} x)^{(x^2)} \left(2x \log(\operatorname{tg} x) + x^2 \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^{\cancel{2}} x} \right) =$$

$$= x\, (\operatorname{tg} x)^{(x^2)} \left(2 \log(\operatorname{tg} x) + \frac{x}{\sin x \cos x} \right)$$

2. La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{e^{x+\frac{1}{x}} - e^{x-\frac{1}{x}}}{x}$

(a) è limitata superiormente ma non ha minimo

(b) ha sia massimo che minimo

(c) è limitata ma non ha né massimo né minimo

► (d) ha minimo ma non ha massimo

Soluzione:

$$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R} \qquad f(x)=\frac{e^{x+\frac{1}{x}}-e^{x-\frac{1}{x}}}{x}$$

f è continua. Vediamo i limiti.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{e^{0+\frac{1}{0^+}}-e^{0-\frac{1}{0^+}}}{0^+}=\frac{e^{+\infty}-e^{-\infty}}{0^+}=\frac{\infty-0}{0^+}=+\infty$$

Osserviamo ora che, per $x\to\infty$

$$e^{x+\frac{1}{x}}-e^{x-\frac{1}{x}}=e^x\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}\right)=e^x\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

$$=e^x\left(\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo di Taylor

$e^t=1+t+o(t)$ per $t\to 0$, prima con $t=\frac{1}{x}$ e poi con $t=-\frac{1}{x}$.

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x}(2+o(1))}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}(2+o(1))=+\infty\cdot 2=\infty \quad \text{(per gerarchia di } \infty\text{)}.$$

Possiamo utilizzare il teorema di Weierstrass generalizzato che ci assicura che f ha minimo.

f non ha massimo perché $\sup(f)=+\infty$.

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{4}} x\tan(4x^2)\,dx.$

► (a) $\dfrac{\log 2}{16}$ (b) $-\dfrac{1}{8}\log\cos\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$ (c) $1+\pi$ (d) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$

Soluzione:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/4} x\,tg(4x^2)\,dx$$

Eseguiamo la sostituzione $4x^2 = t$, $\frac{dt}{dx} = 8x$, $x\,dx = \frac{dt}{8}$

ottenendo

$$\int x\,tg(4x^2)\,dx = \int tg\,t\,\frac{dt}{8} = \frac{1}{8}\int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = -\frac{1}{8}\int \frac{-\sin t}{\cos t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{8}\log(\cos t) + c = -\frac{1}{8}\log(\cos(4x^2)) + c$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/4} x\,tg(4x^2)\,dx = \left[-\frac{1}{8}\log(\cos(4x^2))\right]_0^{\sqrt{\pi}/4} =$$

$$= -\frac{1}{8}\log\left(\cos\left(4\frac{\pi}{16}\right)\right) + \frac{1}{8}\log(\cos 0) = -\frac{1}{8}\log\frac{\sqrt{2}}{2} + \cancel{\frac{1}{8}\log 1}$$

$$= -\frac{1}{8}\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\log 2\right) = \frac{1}{16}\log 2$$

4. $\int x^2 \log x \, dx =$

► (a) $\frac{x^3}{9}(-1+3\log x)+c$ (b) $x^2 \log x - \frac{x^2}{2}+c$ (c) $2x\log x + x + c$ (d) $\frac{x^2}{3}+c$

Soluzione:

Integriamo per parti derivando $\log x$ e integrando x^2:

$$\int x^2 \log x \, dx = \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + c = \frac{x^3}{9}(3\log x - 1) + c.$$

5. $\int_{-1}^{1} \frac{\cos x - e^x}{x - \sin x}\,dx$

► (a) diverge negativamente (b) converge (c) non esiste (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos x - e^x}{x - \sin x}\, dx$$

Poniamo $f(x) = \frac{\cos x - e^x}{x - \sin x}$ e osserviamo che f non è definita per $x = 0$. In ogni altro punto dell'intervallo di integrazione f è definita e continua poiché $|\sin x| < |x|$ $\forall\, x \neq 0$.

Utilizzando gli sviluppi di Taylor per $x \to 0$ otteniamo che

$$f(x) = \frac{\cancel{1} + o(x) - (\cancel{1} + x + o(x))}{\cancel{x} - (\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4))} = \frac{-x + o(x)}{\frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \frac{x\,(-1 + o(1))}{x^3\left(\frac{1}{6} + o(x)\right)} =$$

$$= \frac{1}{x^2} \frac{-1 + o(1)}{\frac{1}{6} + o(x)}$$

Scegliendo $g(x) = \frac{1}{x^2}$ otteniamo che $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -6 < 0$, quindi, per il criterio del confronto asintotico, dato che $\int_0^1 g(x)\, dx = +\infty$, avremo che $\int_0^1 f(x)\, dx = -\infty$.

Ripetendo il ragionamento sull'intervallo $[-1, 0)$ avremo che $\int_{-1}^{0} f(x)\, dx = -\infty$. Ne segue che

$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ diverge negativamente.

6. L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x^3}\, dx$

► (a) diverge positivamente (b) diverge negativamente (c) converge (d) non esiste

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^3}\, dx.$$ Poniamo $f(x) = \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^3}$ e osserviamo che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$.

Dato che f non è limitata in un intorno di 0, dividiamo l'intervallo di integrazione in $(0,1] \cup [1, +\infty)$.

Poniamo $g(x) = \frac{1}{x^2}$ e osserviamo che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \cancel{\frac{1}{x^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^3}\right) \cdot \cancel{x^2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{0^+}\right) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Dato che $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico, otteniamo che $\int_0^1 f(x)\, dx = +\infty$.

Dato che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty)$, $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ può solo convergere o divergere a $+\infty$. Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty$.

7. La successione $a_n = n \sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+1)\right) + (-1)^n \log n$

(a) non è limitata né inferiormente né superiormente

(b) è debolmente decrescente

► (c) è limitata inferiormente

(d) è limitata ma non ha limite

Soluzione:

$$a_n = n \sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+1)\right) + (-1)^n \log n = n \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + (-1)^n \log n =$$

$$= n \sin\frac{\pi}{2} + (-1)^n \log n = n + (-1)^n \log n$$

Quindi

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} n\left(1 + \frac{(-1)^n \log n}{n}\right) \longrightarrow +\infty\,(1+0) = +\infty.$$

quindi la successione è limitata inferiormente.

8. La serie $\sum_{n \geq 1} \left(\log(e^n + 1) - \frac{n^2+1}{n}\right)$

(a) diverge positivamente

► (b) diverge negativamente

(c) converge assolutamente

(d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1}\left(\log(e^n+1)-\frac{n^2+1}{n}\right)$$

Poniamo $a_n = \log(e^n+1) - \frac{n^2+1}{n} = \log\left(e^n\left(1+\frac{1}{e^n}\right)\right) - n - \frac{1}{n} =$

$= \log(e^n) + \log\left(1+\frac{1}{e^n}\right) - n - \frac{1}{n} = \cancel{n} + \frac{1}{e^n} + o\left(\frac{1}{e^n}\right) \cancel{-n} - \frac{1}{n} =$

$= -\frac{1}{n} + \frac{1}{e^n} + o\left(\frac{1}{e^n}\right)$

dove abbiamo usato lo sviluppo di Taylor

$\log(1+t) = t + o(t)$, $t\to 0$ con $t = \frac{1}{e^n}$, $n \to +\infty$.

Scegliamo ora $b_n = \frac{1}{n}$ e osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{e^n}+o\left(\frac{1}{e^n}\right)\right) = -1$$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

9. Sia $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}$, allora $f_{xx} + f_{yy} =$

(a) $2(x+y)e^{x^2+y^2} + 2(x-y)e^{x^2-y^2}$

(b) $2e^{x^2+y^2}(2+x+y) + 2e^{x^2-y^2}(x-y)$

(c) $2e^{x^2}(e^{y^2} + e^{-y^2})$

► (d) $4e^{x^2+y^2} + 4(x^2+y^2)(e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2})$

Soluzione:

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}$$

$$f_x = 2x e^{x^2+y^2} + 2x e^{x^2-y^2} = 2x\left(e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_y = 2y e^{x^2+y^2} - 2y e^{x^2-y^2} = 2y\left(e^{x^2+y^2} - e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_{xx} = 2\left(e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2} + 2x^2 e^{x^2+y^2} + 2x^2 e^{x^2-y^2}\right) =$$

$$= 2\left(e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}\right) + 4x^2\left(e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_{yy} = 2\left(e^{x^2+y^2} - e^{x^2-y^2} + 2y^2 e^{x^2+y^2} + 2y^2 e^{x^2-y^2}\right) =$$

$$= 2\left(e^{x^2+y^2} - e^{x^2-y^2}\right) + 4y^2\left(e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_{xx} + f_{yy} = 4e^{x^2+y^2} + 4(x^2+y^2)\left(e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}\right)$$

10. L'equazione della retta perpendicolare alla curva $x^4 - 4y^2(2 - x^2) = 0$ nel punto di coordinate $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ è

(a) $y = \dfrac{x}{2} + 1$ ► (b) $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{6}$ (c) $y = \dfrac{3}{2}x - 1$ (d) $y = \dfrac{4}{3}x + 2$

Soluzione:

$f(x,y) = x^4 - 4y^2(2-x^2)$.

La curva è la curva di livello $\emptyset$ della funzione f, quindi il gradiente di f è perpendicolare alla curva.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y^2(-2x) = 4x^3 + 8xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -8y(2-x^2)$$

Valutiamo ∇f nel punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{1}{2}\right) = 4 \cdot 1 + 8 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 4+2 = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \frac{1}{2}\right) = -8 \cdot \frac{1}{2}(2-1) = -4 \qquad \Rightarrow \nabla f\left(1, \frac{1}{2}\right) = (6,-4)$$

Il vettore direzione della retta perpendicolare è $(6,-4)$.

Dato che la retta passa per il punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, la sua equazione vettoriale sarà

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Scriviamo ora la retta in forma cartesiana eliminando il parametro t dal sistema

$$\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = \frac{1}{2} - 4t \end{cases} \quad \to t = \frac{x-1}{6}$$

$$\to y = \frac{1}{2} - 4t = \frac{1}{2} - 4\,\frac{x-1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{6}.$$

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 543719 12 gennaio 2026

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	d
2	b
3	d
4	b
5	c
6	c
7	a
8	d
9	c
10	d

1. La derivata della funzione $f(x) = (\tan x)^{(x^2)}$ è

(a) $2x(\tan x)^{(x^2)}$

(b) $\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^{2x}$

(c) $x^2(\tan x)^{x^2-1}$

► (d) $x(\tan x)^{(x^2)}\left(2\log(\tan x) + \dfrac{x}{\sin x \cos x}\right)$

Soluzione:

$$f(x) = (\operatorname{tg} x)^{(x^2)} = e^{x^2 \log(\operatorname{tg} x)}$$

$$f'(x) = e^{x^2 \log(\operatorname{tg} x)} \left(2x \log(\operatorname{tg} x) + x^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) =$$

$$= (\operatorname{tg} x)^{(x^2)} \left(2x \log(\operatorname{tg} x) + x^2 \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^{\cancel{2}} x} \right) =$$

$$= x (\operatorname{tg} x)^{(x^2)} \left(2 \log(\operatorname{tg} x) + \frac{x}{\sin x \cos x} \right)$$

2. L'insieme di definizione della funzione $f(x) = \sqrt{4 - e^{(x^2)}}\, \log(x^2 - 1)$

(a) ha massimo ma non ha minimo

▶ (b) ha sia massimo che minimo

(c) non è limitato né superiormente né inferiormente

(d) è limitato ma non ha minimo

Soluzione:

$f(x) = \sqrt{4 - e^{(x^2)}} \log(x^2 - 1)$

La funzione è definita quando

$$\begin{cases} 4 - e^{(x^2)} \geq 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

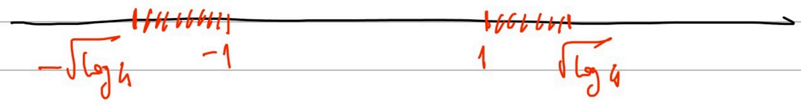
$4 - e^{(x^2)} \geq 0 \iff 4 \geq e^{(x^2)} \iff \log 4 \geq x^2 \iff x \in [-\sqrt{\log 4}, \sqrt{\log 4}]$

$x^2 - 1 > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Quindi l'insieme di definizione di f è

$[-\sqrt{\log 4}, \sqrt{\log 4}] \cap ((-\infty, -1) \cup (1, +\infty))$

osserviamo ora che $\sqrt{\log 4} > \sqrt{\log e} = 1$ quindi



quindi l'insieme intersezione è $[-\sqrt{\log 4}, -1) \cup (1, \sqrt{\log 4}]$ e tale insieme ha come minimo $-\sqrt{\log 4}$ e come massimo $\sqrt{\log 4}$.

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{4}} x \tan(4x^2)\, dx.$

(a) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$ (b) $-\dfrac{1}{8} \log \cos \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$ (c) $1 + \pi$ ► (d) $\dfrac{\log 2}{16}$

Soluzione:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/4} x\,tg(4x^2)\,dx$$

Eseguiamo la sostituzione $4x^2 = t$, $\frac{dt}{dx} = 8x$, $x\,dx = \frac{dt}{8}$

ottenendo

$$\int x\,tg(4x^2)\,dx = \int tg\,t\,\frac{dt}{8} = \frac{1}{8}\int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = -\frac{1}{8}\int \frac{-\sin t}{\cos t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{8}\log(\cos t) + c = -\frac{1}{8}\log(\cos(4x^2)) + c$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/4} x\,tg(4x^2)\,dx = \left[-\frac{1}{8}\log(\cos(4x^2))\right]_0^{\sqrt{\pi}/4} =$$

$$= -\frac{1}{8}\log\left(\cos\left(4\frac{\pi}{16}\right)\right) + \frac{1}{8}\log(\cos 0) = -\frac{1}{8}\log\frac{\sqrt{2}}{2} + \cancel{\frac{1}{8}\log 1}$$

$$= -\frac{1}{8}\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\log 2\right) = \frac{1}{16}\log 2$$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3-x}{x^2-x-20}\,dx =$

(a) $\frac{1}{20}$ ► (b) $\frac{5}{9}\log\frac{4}{5}$ (c) $\frac{7}{9}\log\frac{7}{2}$ (d) $\frac{1}{400}$

Soluzione:

$$\int \frac{3-x}{x^2-x-20}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-x-20}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1-5}{x^2-x-20}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x-20}\,dx + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x^2-x-20} =$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x^2-x-20| + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x-5)(x+4)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x^2-x-20| + \frac{5}{2}\,\frac{1}{5-(-4)}\log\left|\frac{x-5}{x+4}\right| + c =$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x^2-x-20| + \frac{5}{18}\log\left|\frac{x-5}{x+4}\right| + c$$

$$\int_0^1 \frac{3-x}{x^2-x-20}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\log|x^2-x-20| + \frac{5}{18}\log\left|\frac{x-5}{x+4}\right|\right]_0^1 =$$

$$= \cancel{-\frac{1}{2}\log|-20|} + \frac{5}{18}\log\left|\frac{-4}{5}\right| + \cancel{\frac{1}{2}\log|-20|} - \frac{5}{18}\log\left|-\frac{5}{4}\right| =$$

$$= \frac{5}{18}\log\frac{4}{5} - \frac{5}{18}\log\frac{5}{4} = \frac{5}{9}\log\frac{4}{5}\,.$$

5. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\cos x - e^x}{x-\sin x}\,dx$

(a) diverge positivamente (b) converge ► (c) diverge negativamente (d) non esiste

Soluzione:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos x - e^x}{x - \sin x}\, dx$$

Poniamo $f(x) = \frac{\cos x - e^x}{x - \sin x}$ e osserviamo che f non è definita per $x = 0$. In ogni altro punto dell'intervallo di integrazione f è definita e continua poiché $|\sin x| < |x|$ $\forall x \neq 0$.

Utilizzando gli sviluppi di Taylor per $x \to 0$ otteniamo che

$$f(x) = \frac{\cancel{1} + o(x) - (\cancel{1} + x + o(x))}{\cancel{x} - (\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4))} = \frac{-x + o(x)}{\frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \frac{x(-1 + o(1))}{x^3\left(\frac{1}{6} + o(x)\right)} =$$

$$= \frac{1}{x^2} \frac{-1 + o(1)}{\frac{1}{6} + o(x)}$$

Scegliendo $g(x) = \frac{1}{x^2}$ otteniamo che

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -6 < 0$, quindi, per il criterio del confronto asintotico, dato che $\int_0^1 g(x)\, dx = +\infty$, avremo che $\int_0^1 f(x)\, dx = -\infty$.

Ripetendo il ragionamento sull'intervallo $[-1, 0)$ avremo che $\int_{-1}^{0} f(x)\, dx = -\infty$. Ne segue che

$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ diverge negativamente.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x(1+x^2)}\, dx$

(a) converge (b) diverge positivamente ▶ (c) diverge negativamente (d) non esiste

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x(1+x^2)}\, dx$$

Poniamo $f(x) = \dfrac{x-1}{x(1+x^2)}$ e osserviamo che f non è limitata intorno a $x=0$.

Dividiamo l'intervallo di integrazione in $(0,1] \cup [1,+\infty)$.

Osserviamo che $f(x) \leq 0$ se $x \in (0,1]$.

Scegliamo $g(x) = \dfrac{1}{x}$ e osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{\cancel{x}(1+x^2)} \cdot \cancel{x} = \frac{-1}{1} = -1$$

Dato che $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico otteniamo che $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = -\infty$.

Osserviamo ora che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1,+\infty)$.

In questo intervallo scegliamo $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Risulta che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x(1+x^2)} \cdot x^2 = 1$$

Dato che $\displaystyle\int^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico, anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Ne segue che $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$.

7. La successione $a_n = n \sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+1)\right) + (-1)^n \log n$

► (a) è limitata inferiormente

(b) è limitata ma non ha limite

(c) è debolmente decrescente

(d) non è limitata né inferiormente né superiormente

Soluzione:

$$a_n = n\sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+1)\right) + (-1)^n \log n = n \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + (-1)^n \log n =$$

$$= n \sin\frac{\pi}{2} + (-1)^n \log n = n + (-1)^n \log n$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 + \frac{(-1)^n \log n}{n}\right) \to +\infty\,(1+0) = +\infty.$$

quindi la successione è limitata inferiormente.

8. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\log(e^n+1) - \frac{n^2+1}{n}\right)$

(a) converge ma non converge assolutamente

(b) converge assolutamente

(c) diverge positivamente

► (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1}\left(\log(e^n+1) - \frac{n^2+1}{n}\right)$$

Poniamo $a_n = \log(e^n+1) - \frac{n^2+1}{n} = \log\left(e^n\left(1+\frac{1}{e^n}\right)\right) - n - \frac{1}{n} =$

$$= \log(e^n) + \log\left(1+\frac{1}{e^n}\right) - n - \frac{1}{n} = \cancel{n} + \frac{1}{e^n} + o\left(\frac{1}{e^n}\right) - \cancel{n} - \frac{1}{n} =$$

$$= -\frac{1}{n} + \frac{1}{e^n} + o\left(\frac{1}{e^n}\right)$$

dove abbiamo usato lo sviluppo di Taylor

$\log(1+t) = t + o(t)$, $t\to 0$ con $t = \frac{1}{e^n}$, $n\to+\infty$.

Scegliamo ora $b_n = \frac{1}{n}$ e osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{e^n} + o\left(\frac{1}{e^n}\right)\right) = -1$$

Poiché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

9. Sia $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}$, allora $f_{xx} + f_{yy} =$

(a) $2(x+y)e^{x^2+y^2} + 2(x-y)e^{x^2-y^2}$

(b) $2e^{x^2}(e^{y^2} + e^{-y^2})$

► (c) $4e^{x^2+y^2} + 4(x^2+y^2)(e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2})$

(d) $2e^{x^2+y^2}(2+x+y) + 2e^{x^2-y^2}(x-y)$

Soluzione:

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}$$

$$f_x = 2x e^{x^2+y^2} + 2x e^{x^2-y^2} = 2x\left(e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_y = 2y e^{x^2+y^2} - 2y e^{x^2-y^2} = 2y\left(e^{x^2+y^2} - e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_{xx} = 2\left(e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2} + 2x^2 e^{x^2+y^2} + 2x^2 e^{x^2-y^2}\right) =$$

$$= 2\left(e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}\right) + 4x^2\left(e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_{yy} = 2\left(e^{x^2+y^2} - e^{x^2-y^2} + 2y^2 e^{x^2+y^2} + 2y^2 e^{x^2-y^2}\right) =$$

$$= 2\left(e^{x^2+y^2} - e^{x^2-y^2}\right) + 4y^2\left(e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f_{xx} + f_{yy} = 4e^{x^2+y^2} + 4(x^2+y^2)\left(e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2}\right)$$

10. I punti stazionari della funzione $f(x,y) = e^{\frac{3x^4+y^2}{x^2y}}$ sono

(a) una coppia di rette

(b) un solo punto

(c) una coppia di parabole e una retta

► (d) una coppia di parabole private di un punto

Soluzione:

$$f(x,y) = e^{\frac{3x^4+y^2}{x^2y}}$$

$$f_x = e^{\frac{3x^4+y^2}{x^2y}} \frac{12x^3 \cdot x^2y - (3x^4+y^2)2xy}{(x^2y)^2} = \frac{2xy(6x^4-3x^4-y^2)}{x^4y^2} e^{\frac{3x^4+y^2}{x^2y}} =$$

$$= \frac{2(3x^4-y^2)}{x^3y} e^{\frac{3x^4+y^2}{x^2y}}$$

$$f_y = e^{\frac{3x^4+y^2}{x^2y}} \frac{2y\, x^2y - (3x^4+y^2)x^2}{(x^2y)^2} =$$

$$= e^{\frac{3x^4+y^2}{x^2y}} \frac{x^2(2y^2-3x^4-y^2)}{x^4y^2} = e^{\frac{3x^4+y^2}{x^2y}} \frac{y^2-3x^4}{x^2y^2}$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} \frac{2(3x^4-y^2)}{x^3y} \cancel{e^{\frac{3x^4+y^2}{x^2y}}} = 0 \\ \frac{y^2-3x^4}{x^2y^2} \cancel{e^{\frac{3x^4+y^2}{x^2y}}} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x^4 - y^2 = 0 \\ y^2 - 3x^4 = 0 \end{cases} \iff y^2 = 3x^4 \iff y = \sqrt{3}\,x^2$$

oppure

$$y = -\sqrt{3}\,x^2$$

che sono una coppia di parabole alle quali va tolto il punto $(0,0)$ perché f non è definita in tale punto.

codice 543719